

# 一种基于信息传递的分布估计算法

何小娟<sup>1,2</sup>,曾建潮<sup>2</sup>,王丽芳<sup>2</sup>

(1.兰州理工大学电信工程学院,甘肃兰州 730050;2.太原科技大学复杂系统与计算智能实验室,山西太原 030024)

**摘要:** 借鉴信息传递的概率模型,提出一种求解非数值优化问题的新的分布估计算法.首先根据进化过程中的优良信息建立一个不断更新的先验知识概率模型,以相邻符号出现的频率为基础建立条件传递概率模型,然后通过二者的结合建立了一种后验概率模型并用以指导产生新群体.针对旅行商问题进行的仿真试验表明本文算法可较好地改善分布估计算法的早熟收敛现象.

**关键词:** 分布估计算法; 信息传递; 后验概率; 旅行商问题

**中图分类号:** TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 04-0967-04

## An Estimation of Distribution Algorithm Based on Information Transmission

HE Xiao-juan<sup>1,2</sup>, ZENG Jian-chao<sup>2</sup>, WANG Li-fang<sup>2</sup>

(1. College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China;

2. Complex System and Computational Intelligence Laboratory, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan, Shanxi, 030024, China)

**Abstract:** Reference to the probability model of information transmission, a new estimation of distribution algorithm is proposed for non numerical optimization problems. Firstly, an updating model of a priori knowledge probability is built according to the superior information produced during evolution process, and the model of conditional transfer probability is also constructed based on the emerging frequencies of neighboring symbols. Secondly, the model of posterior probability is given by combining the above mentioned probability model to guide new population generating. Finally the presented approach is tested on TSP problems, and the results show that the proposed algorithm can improve the premature convergence of estimation of distribution algorithms.

**Key words:** estimation of distribution algorithms; information transmission; posterior probability; TSP

## 1 引言

传统的遗传算法(Genetic Algorithm,简称GA)是基于人工选择和交叉、变异等操作实现进化过程的一种优化方法.遗传算法在优化过程中易陷入局部最优解或早熟收敛<sup>[1]</sup>.为了克服GA的不足,在进化算法中,一种提取优良解信息建立概率模型,再由概率模型引导进一步搜索的概率分析算法——分布估计算法(Estimation of Distribution Algorithms,简称EDAs)<sup>[2,3]</sup>成为研究的热点.由于弥补了GA的不足,因而分布估计算法能更有效地解决传统遗传算法难以解决的问题<sup>[4,5]</sup>.在分布估计算法中,针对问题建立合适的概率模型和高效的概率模型学习算法,是充分发挥分布估计算法性能的关键<sup>[6,7]</sup>.然而,估计问题的概率分布并不是一个容易的问题,最简单的方法是估计概率分布时假设问题中的变量是相互独立的.PBIL(Population-Based Incremental Learning Algorithm)算法<sup>[3]</sup>在求解问题时不考虑变量之间的相关性,在解决变量之间独立的问题时表现出了较好的性

能,但是在解决变量间存在相关性中效率很低<sup>[8]</sup>.充分考虑变量间相互关系的多变量相关的分布估计算法有利于提高算法的性能,但是其概率模型的复杂性限制了算法的应用<sup>[9]</sup>.

信息论的基本问题是研究有效而可靠地传递信息的方法.信息的传递,是通过建立一个数据传递的概率模型,并结合数据的先验知识,获取数据传递信息,实现信息的有效传递<sup>[10]</sup>.这个概率模型是从大量数据中提取信息建立的,信息的传递过程实际上就是通过一定的概率从大量的随机信号(数据)中提取信息的过程.信息传递过程给我们提供了一个对大量随机数据进行建模进而估计其概率分布的思路.因此,本文借鉴信息传递的思想,在信息传递数学模型的基础上,针对非数值优化问题,提出了一种新的概率模型的建立方式,从而提高EDAs的求解能力.针对旅行商问题(Traveling Salesman Problem,简称TSP)的仿真结果表明算法改善了EDAs在离散优化问题中的过早收敛现象.

### 2 信息传递的数学模型

信息的传递,就是由信源发出信号,经过信道的传输,被信宿接收,信宿从接收到的信号中获取信息.人们用一个离散随机变量的可能取值,表示离散信源可能发出的不同符号,所建立的信源空间的数学模型<sup>[10]</sup>为: $[A \cdot P]: \{p(A = a_i) = p(a_i) \mid i = 1, 2, \dots, r\}$ .其中,  $A$  表示信源,  $a_i (i = 1, 2, \dots, r)$  表示信源发出的符号,  $p(a_i)$  表示信源发出符号  $a_i$  的概率.单符号离散信道允许输入  $r$  种不同的离散符号组成输入符号集  $A: \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  (信源), 相应输出  $s$  种不同的离散符号组成输出符号集  $B: \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$  (信宿). 因此, 信道传递的数学模型可表示为:  $[P]_{r \times s}: \{p(b_j/a_i), j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \dots, r\}$ ,  $p(b_j/a_i)$  表示信源  $A$  发出符号  $a_i$  时, 通过信道的传递, 输出  $b_j$  的条件概率, 称为信道的传递概率. 通过信道矩阵能确定信息传递过程中接收到的信息量.

### 3 基于信息传递的 EDAs

借鉴信息传递的建模方法建立一种针对非数值优化问题的概率模型, 并用于求解非数值优化问题. 算法流程图如图 1 所示.

#### 3.1 产生初始群体

本文采用自然数的排列作为编码方式对问题进行编码. 设个体长度为  $L$ ,  $x = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(L))$  为  $1, 2, \dots, L$  的一个排序,  $\pi(j)$  为排在第  $j$  个位置上的值(符号). 以均匀分布随机产生  $N$  个排列作为初始群体, 评价个体, 从中选择  $M (M < N)$  个适应度好的个体作为优势群体, 初始优势群体记为  $D^0$ .

3.2 建立概率模型

3.2.1 建立信源空间概率模型 令个体中的  $L$  个符号分别对应  $L$  个位置,  $L$  个符号组成离散信源. 令每个位置对应一个信宿,  $L$  个信宿(位置)对应  $L$  个信源空间. 个体在该位置上的取值可看作在该位置上信宿收到的对应信源空间发出的符号. 令各个位置上对应的信源空间为:  $[X \cdot P_j]: \{p_j(X = i) = p_{ij} \mid i, j = 1, 2, \dots, L\}$ . 初始信源空间中各符号的概率为  $1/L$ , 服从均匀分布.

#### 3.2.2 建立条件传递概率模型

从信息传递的角度, 信源空间以一定的概率发出任意一种符号, 都可能导致信宿收到其中的一种符号.

若对应第  $j$  个信宿位置上出现符号  $\pi(j)$ , 则出现的概率可用一个概率向量表示为  $(p(\pi(j)/1), p(\pi(j)/2), \dots, p(\pi(j)/L))^T$ . 则  $L$  个位置对应  $L$  个向量, 组成一个条件概率矩阵. 设第  $t$  代优势群体为  $D^t$ . 其中, 第  $k$  个个体表示为  $x_k^t = (\pi_k^t(1), \pi_k^t(2), \dots, \pi_k^t(L))$ , 优胜个体为  $x^{t*} = (\pi^{t*}(1), \pi^{t*}(2), \dots, \pi^{t*}(L))$ . 根据优胜个体与优势群体, 建立第  $t$  代条件传递矩阵为:  $Q^t = \{q_{ij}^t \mid q_{ij}^t = q^t(\pi^{t*}(j)/i), i, j = 1, 2, \dots, L\}$ . 其中,  $q^t(\pi^{t*}(j)/i)$  表示在符号  $i$  出现的条件下, 符号  $\pi^{t*}(j)$  出现的条件概率. 根据条件概率公式,  $q^t(\pi^{t*}(j)/i) = q^t(\pi^{t*}(j) \cdot i) / q^t(i)$  成立, 其中,  $q^t(\pi^{t*}(j) \cdot i)$  表示符号  $\pi^{t*}(j)$  和  $i$  同时出现的概率,  $q^t(i)$  表示符号  $i$  出现的概率. 这时条件概率被转化为乘积概率来计算. 为了增大出现频率高的符号被保留的机会, 在计算乘积概率时, 不考虑每对相邻符号在优势群体中的具体位置, 只考虑出现与否, 即  $D^t$  中所有相邻值  $\pi^{t*}(j) \cdot i$  频率的总和. 采用如下公式计算:

$$q^t(\pi^{t*}(j) \cdot i) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta_{ij}(x_k^t) \tag{1}$$

$$\delta_{ij}(x_k^t) = \begin{cases} 1 & \pi_k^t(l) = \pi^{t*}(j) \wedge \pi_k^t(l+1) = i \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{2}$$

其中,  $i, j = 1, 2, \dots, L, l \in \{1, 2, \dots, L-1\}$ ,  $\delta_{ij}(x_k^t)$  为 1 表示第  $k$  个个体中存在相邻符号  $\pi^{t*}(j) \cdot i$ , 否则为 0. 这样就建立了一个针对非数值优化问题的条件传递矩阵  $Q^t$ .

#### 3.2.3 建立后验传递概率模型

在符号  $\pi^{t*}(j), j = 1, \dots, L$  出现的条件下, 通过推测对应信源发出各种符号的可能性大小, 建立后验传递矩阵为:  $R^t: \{r_{ij}^t = r^t(i/\pi^{t*}(j)), i, j = 1, 2, \dots, L\}$ . 其中  $r^t(i/\pi^{t*}(j)) = q^t(\pi^{t*}(j)/i) \cdot p_{ij}^t / \sum_{i=1}^L q^t(\pi^{t*}(j)/i) \cdot p_{ij}^t$

后验概率矩阵  $R^t$  刻画了可选择符号出现的概率信息. 这个概率信息是从优胜者的结构出发, 结合信源空间提供的先验信息和条件矩阵推断出的, 因而有较好的统计推断效果.

### 3.3 产生新群体

从后验概率模型中抽样产生新群体, 选择新的优胜个体和优势群体, 更新概率模型.

#### 3.4 概率模型更新

##### 3.4.1 更新信源空间概率模型

设进化到第  $l$  代, 以优胜个体和优势群体  $D^l$  中个体的信息, 更新信源空间的概率如下:

$$p_{ij}^{l+1} =$$

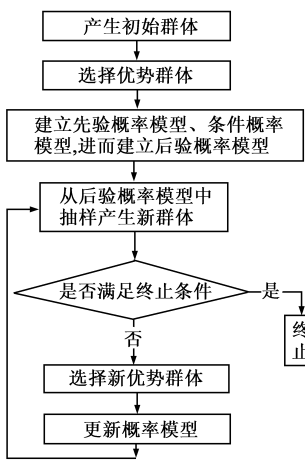


图1 算法流程图

$$\begin{cases} [1 - \alpha \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\delta_j^k)] p_{ij}^l + \alpha \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\delta_j^k) \pi_k^l(j) = \pi^{l*}(j) \\ [1 - \alpha \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\delta_j^k)] p_{ij}^l \quad \pi_k^l(j) \neq \pi^{l*}(j) \end{cases} \quad (4)$$

$$\delta_j^l = \begin{cases} 1 & \pi_k^l(j) = \pi^{l*}(j) \\ 0 & \pi_k^l(j) \neq \pi^{l*}(j) \end{cases} \quad (5)$$

$\delta_j^l(j=1,2,\dots,L)$ 表示优势群体中的个体与优胜个体对应位置上取值的比较,相同取 1,不同为 0.  $\alpha$  为(0,1)之间的一个参数, $\alpha$  越大,上一代对下一代的影响越大.与优胜者对应符号相同则概率增大,反之减小,增强优良信息的概率.更新过程为概率模型提供不断更新的先验知识.

### 3.4.2 更新条件传递概率模型

在建立新的条件传递矩阵时,概率的更新采用下式<sup>[3]</sup>:

$$q_{ij}^{t+1} = (1 - \alpha) \cdot q_{ij}^t + \alpha \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta_{ij}^k(x_k^t) \quad (6)$$

结合新的信源空间和条件传递概率模型,通过公式(3)

表 1 本文算法与 GA、PBIL 和 OPBIL 算法的比较

例子	PBIL		GA		OPBIL		EDAs		IDEAs	
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
eil51	590.17	30.6	687.93	40.87	546.03	20.94	479.62	18.37	467.15	15.40
berlin52	10676.56	812.62	12294.14	859.18	9792.80	548.73	8145.38	206.90	7980.42	176.77
eil76	846.94	57.71	986.99	74.75	754.23	44.49	666.31	43.23	638.19	41.26
kroA100	45871.62	3769.32	55285.64	5290.82	38726.17	2880.93	38489.18	766.77	37795.62	681.02
kroB100	45775.77	4352.58	56804.89	5324.88	38300.59	2782.29	38740.01	532.34	23006.56	640.87
kroC100	45758.08	3216.85	55560.71	4637.72	37351.60	2653.49	38297.58	845.60	36950.51	1108.68
kroD100	44964.25	3324.76	56120.53	4833.36	37229.58	2327.22	37949.93	817.59	37150.66	898.97
kroE100	46057.64	3396.09	55657.73	4583.16	38876.37	2637.26	39157.89	617.35	38296.44	1217.74
Eil101	1112.97	60.10	1323.52	77.86	960.99	59.91	942.08	8.17	911.86	24.89
Ch130	14400.64	933.67	16566.87	1573.22	11638.47	922.89	11838.21	158.24	11600.66	89.34

从表 1 中的结果可以看出,单纯 EDAs 算法的结果优于基本 PBIL 算法和 GA 算法的结果,说明了单纯 EDAs 算法的有效性.但是与 OPBIL 算法比较,对问题 eil51、berlin52、eil76、kroA100 和 Eil101 得到的  $\mu$  值均优于 OPBIL 算法中的  $\mu$  值,其它几个问题的  $\mu$  值劣于 OPBIL 算法中的  $\mu$  值,这是由于没有加入任何变异算子和改进措施的单纯 EDAs 算法不具备很强的局部搜索能力,因而不能对所有例子都求得更好的解.而加入变异算子的 IEDAs 算法得到的  $\mu$  值都优于 OPBIL 的  $\mu$  值.说明 IEDA 算法有较好的搜索能力.且单纯 EDAs 算法与 IEDAs 算法的  $\sigma$  值都小于 OPBIL 得到的  $\sigma$  值,说明本文算法有很好的稳定性.

图 2 是单纯 EDAs 算法与 IEDAs 算法针对 kroA100 问题的收敛曲线图,从图 2 可以看出,IEDAs 与 EDAs 在总的趋势上差别不大,只是在约 2000 代左右 IEDAs 算

得到新的后验传递概率模型,返回 3.3.

重复上述过程,直到满足收敛条件.整个过程采用精英保留策略.

## 4 仿真实验

**实验 1** 为了验证算法的性能,针对 TSP 问题进行仿真试验.本文算法分为两种,一种是没有加任何变异算子的单纯分布估计算法(EDAs),一种是加入一种简单变异算子的改进分布估计算法(IEDAs).简单变异算子为在优势群体中,随机交换个体中的两个元素,得到新个体.算法在连续运行 5 代获得的当前最优解不变时,加入变异算子.为了与文献[8]中的结果进行比较,本文选择 TSPLIB 数据库中与文献[8]相同的例子进行了仿真试验.参数设置与文献[8]相同,即种群规模等于城市个数,eil51 和 berlin52 问题最大运行 2000,eil76 最大运行 2500 代,其余例子最大运行 3500 代,参数  $\alpha = 0.15$ (PBIL 与 OPBIL<sup>[8]</sup>参数设置相同).每个例子运行 30 次, $\mu$  为运行 30 次所得解的平均值, $\sigma$  为均方差.仿真结果如表 1 所示.

法收敛于更优的解.且由表 1 知两种算法的运行结果也均优于其它几种算法的结果,说明本文算法有较好的搜索能力,说明文中所建立的概率模型是一个较好的概率模型.

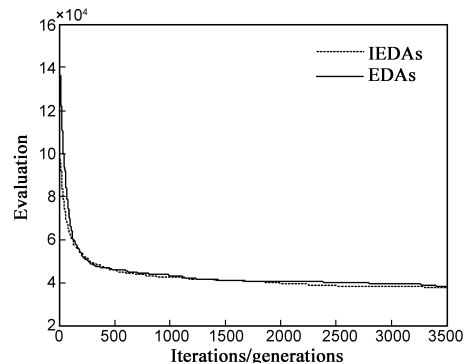


图 2 算法在问题 kroA100 上的收敛曲线图

**实验 2** 为了进一步验证算法的有效性,选择了与文献[11]相同的例子进行测试,并与来自文献[11]中的几类典型的进化算法的结果进行了比较.本文算法参

数设置与文献[11]相同,最大运行代数 2800 代.每个例子运行 20 次.仿真结果如表 2 所示.

表 2 本文算法与其它几类进化算法结果的比较

Instance	ACO		DPSO		SADPSO		EDAs		IEDAs	
	当前最优解	均值	当前最优解	均值	当前最优解	均值	当前最优解	均值	当前最优解	均值
Burma14	30.8785	31.4075	30.8785	31.5551	30.8785	30.8785	30.8785	30.8785	30.8785	30.8785
Oliver30	434.2214	447.9351	453.4200	515.4413	423.7410	424.8267	425.5930	438.2360	423.6380	435.3513
Eil51	449.6437	454.3333	476.9910	523.5421	436.7730	440.7810	434.9945	440.4420	430.8606	439.1252

从表 2 中可以看出,单纯 EDAs 的结果都优于 ACO 算法与 DPSA 算法. IEDAs 算法的结果都等于或优于其它三种算法.说明本文算法具有较好的搜索能力.

## 5 结论

本文借鉴信息传递理论的数学模型,提出了一种求解非数值优化问题的新的分布估计算法.仿真结果表明本文算法可以提高求解效率.本文的目的是为分布估计算法在建立概率模型方面提供一种新的思路和方法,进而从算法本身提高算法的求解能力.如果加入各种改进的变异算子及结合其它启发式方法等操作,都可大大改善解的质量.

## 参考文献

- [1] M Pelikan, D E Goldberg, F Lobo. A Survey of Optimization by Building and Using Probabilistic Models[R]. ILLiGAL Report No. 99018, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois Genetic Algorithms Laboratory, Urbana, Illinois, 1999.
- [2] G R Harik, F G. Lobo, and D E Goldberg. The compact genetic algorithm, Proceedings of the International Conference on Evolutionary Computation[J]. New Jersey, IEEE Service Center, 1998, 523 - 528.
- [3] S Baluja. Population-based incremental learning: A method for integrating genetic search based function optimization and competitive learning[J]. Tech. Report CMU-CS-94-163, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, 1994.
- [4] 周雅兰, 王甲海, 印鉴. 一种基于分布估计的离散粒子群优化算法[J]. 电子学报, 2008, 36(6): 1242 - 1248.  
Zhou Yalan, Wang Jiahai, Yin Jian. A discrete particle swarm optimization algorithm based on estimation of distribution[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(6): 1242 - 1248. (in Chinese)
- [5] T K Paul, H Iba. Linear and Combinatorial Optimizations by Estimation of Distribution Algorithms [A]. Proceedings 9th MPS Symposium on Evolutionary Computation [C]. IPSJ, Japan, 2002. 1 - 8.
- [6] W Bozejko, M Wodeckib, Solving permutational routing problems by population-based metaheuristics[J]. Computers & In-

dustrial Engineering, 2009.

- [7] V Robles, P D Miguel, P Larranaga. Solving the traveling salesman problem with EDAs [M]. Larranaga P, Lozano J A, (eds), Estimation of Distribution Algorithms, Kluwer Academic Publishers, 2002, Chapter 10.
- [8] M Ventresca, H R Tizhoosh. A diversity maintaining population-based incremental learning algorithm [J]. Information Sciences, 2008, 178: 4038 - 4056.
- [9] M Pelikan, D. E Goldberg, E Cantu-Paz. BOA: the Bayesian Optimization Algorithm [A]. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference GECCO - 99 Volume I [C]. 1999. 525 - 532.
- [10] 姜单. 信息论与编码[M]. 中国科学技术大学出版社, 2004. 7. Jiang Dan. Information Theory & Coding [M]. University Press of Science and Technology, 2004. 7. (in Chinese)
- [11] 张长胜, 孙吉贵, 欧阳丹彤. 一种自适应粒子群算法及其应用研究[J]. 电子学报, 2009, 37(2): 299 - 304.  
Zhang Changsheng, Sun Jigui, Ouyang Dantong. A self-adaptive discrete particle swarm optimization algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(2): 299 - 304. (in Chinese)

## 作者简介



何小娟 女, 1970 年出生于陕西西安, 博士研究生, 副教授, 研究领域为智能计算.

E-mail: hexj1993@tom.com.



曾建潮 男, 1963 年出生于陕西大荔, 博士, 教授, 博士生导师. 研究方向为复杂过程的建模与控制、智能计算与智能控制. 任中国自动化学会系统仿真专业委员会副主任委员等职. 承担或完成包括国家自然科学基金、国家科技攻关等项目 30 余项, 出版《微粒群算法》等专著 3 部.

王丽芳 女, 1975 年出生于山西和顺, 博士研究生, 副教授, 研究方向为智能计算.

